题中无圆心有圆　圆来就这么简单

卢妮　　　蔡海涛

福建省莆田第二中学

研究近年高考数学试题，发现解析几何对“椭圆”和“抛物线”的考查难度有所下降，“直线与圆”的地位大幅度提升，具有数学文化背景的题目层出不穷. 其中，有一类圆的问题在已知条件中没有直接给出圆的有关信息，而是隐藏在条件中，需要通过分析转化，从而发现圆（或圆的方程），进而利用圆的知识求解，这类问题称为“隐形圆”问题. 比如“蒙日圆”“阿波罗尼斯圆”等. “隐形圆”问题综合性强，充分考查了学生数形结合、化归与转化等数学思想方法，学生答题有一定的难度. 本文以几道高考题和模拟题为例，探寻“隐形圆”问题求解策略.

一、利用圆的定义（到定点的距离等于定长的点的轨迹）确定隐形圆

例1 若与点 $A(\quad)$ 的距离为1且与点 $B(\quad)$ 的距离为3的直线恰好有两条，则实数的取值范围为____________.

解析　与定点 A 距离为1的点的轨迹为圆，所以与点 $A(\quad)$ 的距离为1的直线为圆的切线，同理与点 $B(\quad)$ 的距离为3的直线也以 B 为圆心，3为半径的圆的切线，故同时满足两个条件的直线应该为两圆的公切线，因为公切线恰为两条，所以两圆相交，则

$- < |AB| < +$ ，所以　的取值范围为 $(\ -\sqrt{\ }\ )\cup(\ +\sqrt{\ }\ )$.

点评　本题根据圆的定义得到隐圆，得到以点 $A(\quad)$ 和点 $B(\quad)$ 为圆心的两个圆，这是本题的关键，进而由已知条件得两圆位置关系，从而求得　的取值范围.

变式训练1： 若对任意　$\in$　，直线　　$\alpha+$　　$\alpha=$　　$\alpha+\frac{\pi}{}$　$+$　与圆

C $(\ -\ )+(\ -\sqrt{\ }\ )=$ 均无公共点，则实数　的取值范围为____________.

解析 直线　的方程可化为：　$-$　　$\alpha+$　$-\sqrt{\ }$　　$\alpha=$　，$M(\ \sqrt{\ }\ )$ 到　的距离为4，所以　是以 M 为圆心，半径为 4 的定圆的切线系，故问题转化为圆 M 与圆 C 内含，易得　的取值范围为 $\left(-- -\right)$.

二、到两定点距离的平方和为定值确定隐形圆

例 2 在平面直角坐标系　　中，已知圆 C $(\ -\ )+(\ -\ +\ )=$ ，点 $A(\quad)$，若圆 C 上存在点 M，满足 $MA\ +MO\ =$　，则实数　的取值范围是______.

解析　由 $MA\ +MO\ =$　，可得点 M 满足方程为　$+(\ -\ )=$　，则问题转化为该圆与圆 C 有公共点，易得实数　的取值范围为 $[\quad]$.

点评 本题关键在于确定动点M的位置，根据点M到点A和点O的距离的平方和为定值，从而确定隐圆，突破了本题难点.

变式训练 2：(2017 北大自主招生) 正方形$ABCD$与点P在同一平面内，已知该正方形的边长为 1，且$\left|PA\right| + \left|PB\right| = \left|PC\right|$，则$\left|PD\right|$的最大值为（　　）

$+\sqrt{\ }$　　$\sqrt{\ }$　　$+\sqrt{\ }$　　前三个答案都不对

解析 建立直角坐标系，设$A(\quad)$，$B(\quad)$，$C(\quad)$，$D(\quad)$，$D(\quad)$

由$\left|PA\right| + \left|PB\right| = \left|PC\right|$得　$+(\ +\ ) =$ ，圆心$M(\ -)$，则$\left|PD\right|$的最大值为$\left|MD\right| + = +\sqrt{\ }$. 故选　.

三、动点P对两定点A、B张角是　$^\circ$（$_{PA}\cdot{}_{PB} = -$ 或$\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB} =$ ）确定隐形圆

例 3（2014 年高考四川卷·文 9）设　$\in$ ，过定点A的动直线　$+$　$=$　和过定点B的动直线　$-$　$-$　$+$　$=$　交于点P，则$PA+PB$的取值范围是（　　）

$A\left[\sqrt{\ }\quad\sqrt{\ }\right]$　　$\left[\sqrt{\ }\quad\sqrt{\ }\right]$　　$\left[\sqrt{\ }\quad\sqrt{\ }\right]$　　$\left[\sqrt{\ }\quad\sqrt{\ }\right]$

解析 易得$A(\quad)$，$B(\quad)$，分类讨论直线斜率存在与否，当直线　$+$　$=$　斜率不存在时，可得$P(\quad)$. 当直线斜率存在时，发现 $_{PA}\cdot{}_{PB} = -$ ，从而知点P在以AB为直径的圆上，当P与A或B点重合时，$PA+PB$取到最小值，当P不与A或B点重合时，由不等式的性质知$PA+PB \leqslant \sqrt{\frac{PA\quad PB}{\ }}\quad\sqrt{\ }$，故选　.

点评 本题解题的突破口是发现两条动直线的关系，由 $_{PA}\cdot{}_{PB} = -$ 确定隐圆，得到P点轨迹，结合不等式性质求解.

变式训练3 已知圆C　$(\ -\ ) + (\ -\ ) =$　和两点$A(-\quad)$，$B(\quad)$，若圆上存在点P，使得$\angle APB =\ ^\circ$，　的取值范围为__________.

解析 由已知得以AB为直径的圆与圆C有公共点，易求得　的取值范围为$[\quad]$.

四、两定点A、B，动点P满足$\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB} = \lambda$确定隐形圆

例 4（2017 年高考江苏卷·13）在平面直角坐标系　　中，$A(-\quad)$，$B(\quad)$，点P在圆O　$+$　$=$　上，若$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} \leqslant$ ，则点P的横坐标的取值范围是_________.

解析 设 P ，由 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\leqslant$ ，易得 $-\ +\ \leqslant$ ，由 $\begin{cases} -\ +\ = \\ +\ = \end{cases}$ ，可得

$A\begin{cases} =- \\ =- \end{cases}$ 或 $B\begin{cases} = \\ = \end{cases}$ ，由 $-\ +\ \leqslant$ 得点 P 在圆左边弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上，结合限制条件

$-\sqrt{\ }\leqslant\ \leqslant\sqrt{\ }$，可得点 P 横坐标的取值范围为 $-\sqrt{\ }$.

点评 在平面内，若 A，B 为定点，且 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\lambda$，则 P 的轨迹是以 M 为圆

心，$\sqrt{\lambda+-AB}$ 为半径的圆. 本题 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\leqslant$ 确定隐圆，得到 P 点轨迹为圆左边弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上，

进而问题轻松获解.

变式训练4 已知点 $A(\quad)$，$B(\ -\ )$，点 P 在直线 $-\ +\ =$ 上，若满足等式

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}+\ \lambda=$ 的点 P 有两个，则实数 λ 的取值范围是______.

解析 设 $P(\quad)$，由 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}+\ \lambda=$ 得 $(\ -\ )+\ =\ -\lambda\left(\lambda<—\right)$，问题转化

为直线与圆相交问题，所以 $\lambda<$.

五、两定点 A、B，动点 P 满足 $\dfrac{PA}{PB}=\lambda\ \lambda>\ ,\ \lambda\neq\ $）确定隐形圆（阿波罗尼斯圆）

例 5（2008 年高考江苏卷 • 13）满足条件 $AB=$ ，$AC=\sqrt{\ }BC$ 的三角形 ABC 面积的最大值为_________.

解析 设角 A，B，C 对边分别为 ， ， ，以 $\overrightarrow{AB}$ 的方向为 轴正方向，以 AB 的中点为坐标原点建立平面直角坐标系，设 $A(-\quad)$，$B(\quad)$，由 $AC=\sqrt{\ }BC$ 得

$(\ -\ )+\ =$ ，所以点 C 的轨迹是以 $(\quad)$ 为圆心， $\sqrt{\ }$ 为半径的圆，所以当点 C 到

轴的距离最大时三角形的面积的最大，最大值为 $\sqrt{\ }$.

点评 在平面上给定两点 A，B，设点 P 在同一平面上且满足 $\dfrac{PA}{PB}=\lambda\ \lambda>\ ,\ \lambda\neq\ $)，点 P 的轨迹是一个以定比 λ 内分和外分定线段 AB 的两个分点的连线为直径的圆，这个圆称为阿波罗尼斯圆，简称阿氏圆. 若学生掌握了阿波罗尼斯圆，本题不难获解.

变式训练 5 在平面直角坐标 中，已知点 $A(\quad)$，$B(\quad)$，若直线 $-\ +\ =$ 上

存在点 P 使得 $|PA|=-|PB|$，实数 的取值范围为____________.

解析 点 P 阿波罗尼斯圆， 的取值范围为 $\left[-\ \sqrt{\ }\quad \sqrt{\ }\right]$.

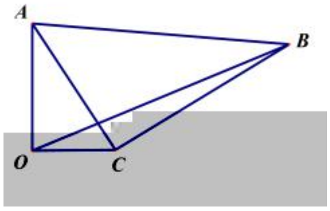
六、由圆周角的性质确定隐形圆

例 6 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = \ ^\circ$，O 是 $\triangle ABC$ 的外心，若 $\overrightarrow{OC} = \ \overrightarrow{OA} + \ \overrightarrow{OB}(\quad \in \ )$，则 $\ + \ $ 的取值范围是______________.

解析 $\angle AOB = \ \angle C = \ ^\circ$，两边平方 $\overrightarrow{OC} = \ \overrightarrow{OA} + \ \overrightarrow{OB}(\quad \in \ )$ 得 $\ + \ = \ $ 结合基本不等式，可得出 $\ + \ $ 的取值范围是 $\left[-\sqrt{\ }\quad \right]$.

点评 $\angle AOB = \ \angle C = \ ^\circ$ 知点 C 在以 O 为圆心，半径 OA，在优弧 AB 上.

变式训练 6 如图，四边形 $AOCB$，$OA \perp OC$，$CA \perp CB$，若 $AC = \ $，$CB = \ $，则 OB 的取值范围是______________.



解析 点 O 在以 AC 为直径的圆上，OB 的取值范围是 $\left[\sqrt{\ } - \quad \sqrt{\ } + \ \right]$.

由以上例题分析可知，“隐圆”问题着重考查化归与转化的思想在解题中的运用，解决方法就是分析已知条件，从条件出发探求动点轨迹，把隐形轨迹显性化，从而发现圆，然后利用圆的知识求解问题.